Задача об использовании сырья

Для производства четырех видов изделий A_1 , A_2 , A_3 , A_4 завод должен использовать три вида сырья I, II, III , запасы которого на планируемый период составляют соответственно 1000, 600 и 150 условных единиц. В приведенной ниже таблице даны технологические коэффициенты, т.е. расход каждого вида сырья на производство единицы каждого изделия и прибыль от реализации единицы изделия каждого вида.

Виды сырья	Запасы сырья	Технологические коэффициенты			
		A_1	A_2	A_3	A_4
I	1000	5	1	0	2
II	600	4	2	2	1
III	150	1	0	2	1
Прибыль от реализации		6	2	2,5	4

Требуется составить такой **план** выпуска указанных изделий, чтобы обеспечить **максимальную прибыль** от их реализации.

Составим математическую модель задачи

Обозначим через x_1 , x_2 , x_3 , x_4 количество единиц соответствующих изделий: A_1 , A_2 , A_3 , A_4. Тогда экономико-математическая модель задачи будет следующая: найти максимум функции

$$F = 6x_1 + 2x_2 + 2{,}5x_3 + 4x_4 \rightarrow \max$$

при выполнении системы ограничений

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_4 \le 1000\ , \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \le 600\ , \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \le 150\ , \\ x_j \ge 0, (j = 1,2,3,4\ ). \end{cases}$$

Для обращения системы ограничений-неравенств в систему уравнений прибавим к левой части каждого неравенства добавочные неотрицательные переменные x_5 , x_6 , x_7 . Эти добавочные переменные в условиях данной задачи имеют конкретное экономическое содержание, а именно: объем остатков сырья каждого вида после выполнения плана выпуска продукции.

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 = 1000, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_6 = 600, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 + x_7 = 150, \\ x_j \ge 0\ (j = 1,2,\ldots,7\ ). \end{cases}$$

После введения добавочных переменных получим систему уравнений: Нужно найти такое допустимое базисное решение системы, которое бы максимизировало целевую функцию F, т.е. необходимо найти оптимальное решение задачи. Так как система ограничений состоит из трех независимых уравнений с семью переменными, то число основных (базисных) переменных должно равняться трем, а число неосновных — четырем.

Для решения задачи симплексным методом, прежде всего, нужно найти любое базисное решение. В условиях данной задачи оно может быть найдено без труда. Для этого достаточно принять за основные добавочные переменные x_5 , x_6 , x_7. Так как коэффициенты при этих переменных образуют единичную матрицу, то отпадает необходимость вычислять определитель (определитель единичной матрицы равен ***1***, т.е. отличен от нуля).

Положив неосновные (свободные) переменные x_1 , x_2 , x_3 , x_4 равными нулю, получим базисное решение ***(0; 0; 0; 0; 1000; 600; 150)***, которое оказалось допустимым. Поэтому в условиях данной задачи отпадает надобность в применении первого этапа симплексного метода. Переходим сразу ко второму этапу, т.е. к поискам оптимального решения.

I шаг. Основные переменные x_5 , x_6 , x_7. Составляем первую симплекс-таблицу. Находим разрешающий элемент.

Базисные переменные	Свобод. члены	x5	x6	x7	x1	x2	x3	x4
x5	1000	1	0	0	5	1	0	2
x6	600	0	1	0	4	2	2	1
x7	150	0	0	1	1	0	2	1
F	0	0	0	0	-6	-2	-2,5	-4

Базисное решение ***(0; 0; 0; 0; 1000; 600; 150)***.

$$X_1 = \min\left\{\frac{1000}{5};\frac{600}{4};\frac{150}{1}\right\} = \min\{200;150;150\} = 150$$

II шаг. Основные переменные x_1 , x_5 , x_6 . Составляем новую симплекс-таблицу. Снова находим разрешающий элемент.

Базисные переменные	Свобод. члены	x_5	x_6	x_7	x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	250	1	0	-5	0	1	-10	-3
x_6	0	0	1	-4	0	2	-6	-3
x_1	150	0	0	1	1	0	2	1
F	900	0	0	6	0	-2	9,5	2

Базисное решение ***(150; 0; 0; 0; 250; 0; 0)***.

$$X_2 = \min\left\{\frac{250}{1};\frac{0}{2}\right\} = 0$$

III шаг. Основные переменные x_1 , x_2 , x_5. Составляем новую симплекс-таблицу. Находим разрешающий элемент.

Базисные переменные	Свобод. члены	x_5	x_6	x_7	x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	250	1	-0,5	-3	0	0	-7	-1,5
x_2	0	0	0,5	-2	0	1	-3	-1,5
x_1	150	0	0	1	1	0	2	1
F	900	0	1	2	0	0	3,5	-1

Базисное решение ***(150; 0; 0; 0; 250; 0; 0)***.

$$X_4 = \min\left\{\frac{150}{1};\infty;\infty\right\} = 150 = \min\{200;150;150\} = 150$$

IV шаг. Основные переменные x2, x4, x5. Переходим к следующей таблице.

Базисные переменные	Свобод. члены	x_5	x_6	x_7	x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	475	1	-0,5	-1,5	1,5	0	-4	0
x_2	225	0	0,5	-0,5	1,5	1	0	0
x_4	150	0	0	1	1	0	2	1
F	1050	0	1	3	1	0	5,5	0

Эта таблица является последней, по ней читаем ответ задачи. Оптимальным будет решение ***(0; 225; 0; 150; 475; 0; 0)*** при котором $F_{max} = 1050$, т.е. для получения наибольшей прибыли, равной ***1050*** денежных единиц, предприятие должно выпустить ***225*** единиц продукции вида A_2 , ***150*** единиц продукции вида A_4 , (продукцию вида A_1 и A_3 в данных условиях производить не выгодно) при этом сырье типа II и III будет использовано полностью, а ***475*** единиц сырья типа I останутся неизрасходованными.