

Лабораторная работа №1

Тема: Моделирование, решение и анализ задач линейного программирования (ЛП).

Цель работы:

1. Построение математической модели реальных ситуаций в виде задачи ЛП.
2. Изучение возможностей пакетов прикладных программ для ЛП (на примере пакета прикладных программ «ПЭР»)
3. Решение индивидуальной задачи путем построения математической модели и использования пакета ПЭР.
4. Анализ решений и модификация модели задачи ЛП.

Литература:

1. Х. Таха. “Введение в исследование операций”. Том 1. Мир 1985 г., стр. 26
2. И.Л. Акулич. “Математическое программирование в примерах и задачах”. ВШ, 1986 г., стр.29,67,116.
3. Руководство по применению пакета прикладных программ «ПЭР».
4. Курс лекций Раздел «Линейное программирование»

Порядок выполнения работы:

1. Знакомство с пакетом «ПЭР».
2. Изучение, математическое моделирование тестовой задачи.
3. Выполнение индивидуального задания.
 - а) составление математической модели ,
 - б) ввод и решение задачи,
 - с) анализ оптимального решения на чувствительность к изменениям исходных данных.

4. Составление подробного отчёта по лабораторной работе, в котором представляется:

- формулировка индивидуального задания,
- математическая модель и пояснение к её построению,
- входная таблица с экрана монитора и выходные таблицы для всех опций программы и содержательные пояснения к ним,
- выводы по лабораторной работе.

Варианты заданий

Задача 1.

На швейной фабрике для изготовления четырёх видов изделий может быть использована ткань трёх артикулов. Нормы расхода тканей всех артикулов на пошив одного изделия приведены в таблице. В ней так же указаны имеющиеся в распоряжении фабрики общее количество тканей каждого артикула и цена изделия данного вида. Определить, сколько изделий каждого вида должна произвести фабрика, чтобы стоимость изготовленной продукции была максимальной.

Таблица 1

Артикул ткани	Норма расхода ткани (м) на одно изделие вида				Общее количество ткани
	1	2	3	4	
I	1	-	2	1	180
II	-	1	3	2	210
III	4	2	-	4	800
Цена одного изделия (руб.)	9	6	4	7	

Задача 2.

Предприятие выпускает четыре вида продукции и использует три типа основного оборудования: токарное, фрезерное и шлифовальное. Затраты време

ни на изготовление единицы продукции для каждого из типов оборудования приведены в таблице. В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия данного вида. Определить такой объем выпуска каждого из изделий, при котором общая прибыль от их реализации является максимальной.

Таблица 2

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на единицу продукции вида				Общий фонд рабочего времени (станко-ч)
	1	2	3	4	
Токарное	2	1	1	3	300
Фрезерное	1	-	2	1	70
Шлифовальное	1	2	1	-	340
Прибыль от реализации единицы продукции (руб.)	8	3	2	1	

Задача 3.

Для перевозок груза на трёх линиях могут быть использованы суда трёх типов. Производительность судов при использовании их на различных линиях характеризуются данными, приведёнными в таблице. В ней же указаны общее время, в течение которого суда каждого типа находятся в эксплуатации, и минимально необходимые объёмы перевозок на каждой линии. Определить, какие суда, на какой линии и в течение какого времени следует использовать, чтобы обеспечить максимальную загрузку судов с учётом возможного времени их эксплуатации.

Таблица 3

Тип судна	Производительность судов (млн.тонномиль в сутки) на линии			Общее время эксплуата ции судов
	1	2	3	
I	8	14	11	300
II	6	15	13	300
III	12	12	4	300
Заданный объём перевозок (млн. Тонно-миль)	3000	5400	3300	

Задача 4.

Найти решение, состоящее в определении плана изготовления изделий А, В и С, обеспечивающего максимальный их выпуск, в стоимости выраженной с учётом ограничений на возможное использование сырья трёх видов. Нормы расхода сырья каждого вида на одно изделие, цена одного изделия соответствующего вида, а также имеющегося сырья, приведены в таблице.

Таблица 4

Вид сырья	Нормы затрат (кг) на одно изделие			Общее количество сырья (кг)
	А	В	С	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Цена одного изделия (руб.)	9	10	16	-

Задача 5.

На ткацкой фабрике для изготовления трёх артикулов ткани используются станки двух типов, пряжа и красители. В таблице указаны производительность станка каждого типа, нормы расхода пряжи и красителей, цена 1 метра ткани данного артикула, а также общий фонд рабочего времени станков каждого типа, имеющихся в распоряжении фабрики фонды пряжи и красителей и ограничения на возможный выпуск тканей данного артикула.

Таблица 5

Ресурсы	Нормы затрат на 1 м ткани артикула			Общее количество ресурсов
	1	2	3	
Производительность станков (станко-ч):				
I типа	0,02	-	0,04	200
II типа	0,04	0,03	0,01	500
Пряжа (кг)	1,0	1,5	2,0	15000
Красители (кг)	0,03	0,02	0,025	450
Цена 1м ткани (руб.)	5	8	8	-
Выпуск ткани (м):				
Минимальный	1000	2000	2500	-
Максимальный	2000	9000	4000	-

Задача 6.

Машиностроительное предприятие для изготовления четырёх видов продукции использует токарное, фрезерное, сверлильное, расточное и шлифовальное оборудование, а также комплектующие изделия.

Кроме того, сборка изделий требует выполнения определённых сборочно-наладочных работ. Нормы затрат всех видов на изготовление каждого из изделий приведены в таблице. В этой же таблице указаны наличный фонд каждого из ресурсов, прибыль от реализации единицы продукции данного вида, а также ограничения на возможный выпуск продукции 2-го и 3-го вида.

Найти план выпуска продукции, при котором прибыль от её реализации является максимальной.

Таблица 6

Ресурсы	Нормы затрат на изготовление одного изделия				Общий объём ресурсов
	1	2	3	4	
Производительность оборудования (человек-ч):					
Токарного	550	-	620	-	64270
Фрезерного	40	30	20	20	4800
Сверлильного	86	110	150	52	22360
Расточного	160	92	158	128	26240
Шлифовального	-	158	30	50	7900
Комплекующие изделия (шт)	3	4	3	3	520
Сборочно-наладочные работы (человек-ч)	4,5	4,5	4,5	4,5	720
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	315	278	573	370	-
Выпуск (шт.):					
Минимальный	-	40	-	-	-
Максимальный	-	-	120	-	-

Найти план выпуска продукции, при котором прибыль от её реализации является максимальной.

Задача 7.

Для обогрева помещений используются четыре агрегата, каждый из которых может работать на любом из пяти сортов топлива, имеющемся в количествах 90, 110, 70, 80 и 150 т. Потребность в топливе каждого из агрегатов соответственно равна 80, 120, 140 и 160 т. Теплотворная способность i -ого сорта топлива при использовании его на j -ом агрегате задаётся матрицей

$$(C_{ij}) = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 11 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 6 \\ 7 & 11 & 5 & 8 & 7 \\ 9 & 8 & 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

Найти такое распределение топлива между агрегатами, при котором получается максимальное количество теплоты от использования всего топлива.

Задача 8.

Изготавливаемый на пяти кирпичных заводах кирпич поступает на шесть строящихся объектов. Ежедневное производство кирпича и потребность в нём указаны в таблице. В ней же указана цена перевозок 1000 шт. кирпича с каждого из заводов к каждому из объектов.

Составить план перевозок, согласно которому обеспечиваются потребности в кирпиче на каждом из строящихся объектов при минимальной общей стоимости перевозок.

Таблица 8

Кирпичный завод	Цена перевозки 1 тыс. шт. Кирпича к строящемуся объекту						Производство кирпича (тыс. шт.)
	1	2	3	4	5	6	
I	8	7	5	10	12	8	240
II	13	8	10	7	6	13	360
III	12	4	11	9	10	11	180
IV	14	6	12	13	7	14	120
V	9	12	14	15	8	13	150
Потребность в кирпиче (тыс. шт.)	230	220	130	170	190	110	-

Задача 9.

Для поддержания нормальной жизнедеятельности человеку необходимо потреблять не менее 118 г белков, 56 г жиров, 500 г углеводов, 8 г минеральных солей. Количество питательных веществ, содержащихся в 1 кг каждого вида потребляемых продуктов, а также цена 1 кг каждого из этих продуктов приведены в следующей таблице:

Таблица 9

Питательные вещества	Содержание (г) питательных веществ в 1 кг продуктов						
	Мясо	рыба	молоко	Масло	сыр	крупа	картофель
Белки	180	190	30	10	260	130	21
Жиры	20	3	40	865	310	30	2
Углеводы	-	-	50	6	20	650	200
Минеральные соли	9	10	7	12	60	20	10
Цена 1 кг продуктов (руб.)	1,8	1,0	0,28	3,4	2,9	0,5	0,1

Составить дневной рацион, содержащий не менее минимальной суточной нормы потребности человека в необходимых питательных веществах при минимальной общей стоимости потребляемых продуктов.

Задача 10.

Для перевозок трёх видов продукции предприятие использует два типа технологического оборудования и два вида сырья. Нормы затрат сырья и времени на изготовление одного изделия каждого вида приведены в таблице. В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждой из групп технологического оборудования, объёмы имеющегося сырья каждого вида, а также цена одного изделия данного вида и ограничения на возможный выпуск каждого из изделий.

Таблица 10

Ресурсы	Нормы затрат на одно изделие вида			Общее количество ресурсов
	1	2	3	
Производительность оборудования (норм-ч):				
I типа	2	-	4	200
II типа	4	3	1	500
Сырьё (кг):				
1-го вида	10	15	20	1495
2-го вида	30	20	25	4500
Цена одного изделия (руб.)	10	15	20	-
Выпуск (шт.):				
Минимальный	10	20	25	-
Максимальный	20	40	100	-

Составить такой план производства продукции, согласно которому будет изготовлено необходимое количество изделий каждого вида, а общая стоимость всей изготавливаемой продукции максимальна.

Задача 11.

При производстве четырёх видов кабеля выполняется пять групп технологических операций. Нормы затрат на 1 км кабеля данного вида на каждой из групп операции, прибыль от реализации 1 км каждого вида кабеля, а также общий фонд рабочего времени, в течение которого могут выполняться эти операции, указаны в таблице.

Таблица 11

Технологическая операция	Нормы затрат времени (ч) на обработку 1 км кабеля вида				Общий фонд рабочего времени (ч)
	1	2	3	4	
Волочение	1,2	1,8	1,6	2,4	7200
Наложение изоляции	1,0	0,4	0,8	0,7	5600
Скручивание элементов в кабель	6,4	5,6	6,0	8,0	11176
Освинцевание	3,0	-	1,8	2,4	3600
Испытание и контроль	2,1	1,5	0,8	3,0	4200
Прибыль от реализации 1 км кабеля	1,2	0,8	1,0	1,3	-

Определить такой план выпуска кабеля, при котором общая прибыль от реализации изготавливаемой продукции является максимальной.

Задача 12.

На мебельной фабрике изготавливается пять видов продукции: столы, шкафы, диваны-кровати, кресла-кровати и тахты. Нормы затрат труда, а также древесины и ткани на производство единицы продукции данного вида приведены в таблице.

Таблица 12

Ресурсы	Норма расхода ресурса на единицу продукции					Общее количество ресурсов
	стол	шкаф	диван-кровать	кресло-кровать	тахта	
Трудозатраты (человека-ч)	4	8	12	9	10	3456
Древесина (м ³)	0,4	0,6	0,3	0,2	0,3	432
Ткань (м)	-	-	6	4	5	2400
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	8	10	16	14	12	-
Выпуск (шт.):						
Минимальный	120	90	20	40	30	-
Максимальный	480	560	180	160	120	-

В этой же таблице указана прибыль от реализации одного изделия каждого вида, приведено общее количество ресурсов данного вида, имеющееся в распоряжении фабрики, а также указано (на основе изучения спроса), в пределах каких объёмов может изготавливаться каждый вид продукции.

Определить план производства продукции мебельной фабрикой, согласно которому прибыль от её реализации является максимальной. Используя пакет PER, найти решение задачи, а также провести после оптимизационный анализ полученного решения.

Задача 13.

Из трёх видов сырья необходимо составить смесь, в состав которой должно входить не менее 26 ед. химического вещества А, 30 ед. – вещества В и 24 ед. – вещества С. Количество единиц химического вещества, содержащегося в 1 кг сырья каждого вида, указано в таблице. В ней же приведена цена 1 кг сырья каждого вида.

Составить смесь, содержащую не менее необходимого количества данного вида и имеющую минимальную стоимость.

Таблица 13

Вещество	Количество единиц вещества, содержащегося в 1 кг сырья вида			
	1	2	3	4
А	1	1	-	4
В	2	-	3	5
С	1	2	4	6
Цена 1 кг сырья (руб.)	5	6	7	8

1. Цель работы

Целью работы является решение задач линейного программирования с использованием пакета экономических расчетов.

2. Выполнение работы

Дана следующая задача линейного программирования на оптимальное распределение ресурсов.

Для изготовления 5 видов ($j=1\dots5$) продукции используются ресурсы 4-х видов ($i=1\dots4$). Задан директивный план на выпуск максимального j -го вида продукции.

Требуется определить оптимальный план выпуска продукции каждого вида, при котором достигается максимум прибыли.

Целевая функция (прибыль $p_j=c_j-s_j$, c_j – цена, s_j – затраты)

$$p=10x_1+10x_2+5x_3+5x_4+10x_5 \rightarrow \max$$

Ограничительные уравнения, составленные на основе задания:

$$10x_1+40x_2+2x_3+20x_4+60x_5 \leq 2300 \text{ (полуфабрикаты, кг)}$$

$$1,5x_1+20x_2+4,5x_3+5x_4+25x_5 \leq 300 \text{ (токарные работы, норма час)}$$

$$6x_1+4x_2+10x_3+10x_4+1x_5 \leq 800 \text{ (слесарные работы, норма час)}$$

$$8x_1+22x_2+6x_3+15x_4+20x_5 \leq 1500 \text{ (отделочные работы, норма час)}$$

$$x_1 \leq 120 \text{ (ограничительные условия на максимальное производство продукции)}$$

$$x_2 \leq 26$$

С помощью пакета экономических расчетов, который решает задачу симплекс-методом, получены следующие таблицы результатов:

ИТОГОВЫЙ РЕЗУЛЬТАТ ДЛЯ New1						Стр. : 1
Переменн. No. Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен	Переменн. No. Имена	РЕШЕНИЕ	Двойственн. оцен	
1 X1	120.0000	0.0000	7 S2	0.0000	0.4396	
2 X2	4.6154	0.0000	8 S3	0.0000	0.3022	
3 X3	6.1538	0.0000	9 S4	401.5385	0.0000	
4 X4	0.0000	0.2198	10 S5	0.0000	7.5275	
5 X5	0.0000	1.2912	11 S6	21.3846	0.0000	
6 S1	903.0769	0.0000				
MAX величина цел. ф-и = 1276.923 Итерац. = 3						

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ КОЭФФ. ЦЕЛЕВОЙ Ф-ЦИИ								Стр. : 1
C<j>	Min. C<j>	Исходный	Max. C<j>	C<j>	Min. C<j>	Исходный	Max. C<j>	
C<1>	2.4725	10.0000	+ бесконеч	C<4>	- бесконеч	5.0000	5.2198	
C<2>	9.0428	10.0000	22.2222	C<5>	- бесконеч	10.0000	11.2912	
C<3>	4.7778	5.0000	7.9375					

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПР.ЧАСТИ								Стр. : 1
B<i>	Min. B<i>	Исходный	Max. B<i>	B<i>	Min. B<i>	Исходный	Max. B<i>	
B<1>	1396.9231	2300.0000	+ бесконеч	B<4>	1098.4615	1500.0000	+ бесконеч	
B<2>	216.0000	300.0000	580.0000	B<5>	50.0000	120.0000	129.8246	
B<3>	744.0000	800.0000	986.6667	B<6>	4.6154	26.0000	+ бесконеч	

Пошаговое выполнение симплекс-метода

Итерация : 1	Нов. ЦФ <Max.> = 1200		
ВВОДИМ : X1	со стоим. = 120	ВЫВОДИМ: S5	Стр. 5
Итерация : 2	Нов. ЦФ <Max.> = 1260		
ВВОДИМ : X2	со стоим. = 6	ВЫВОДИМ: S2	Стр. 2
Итерация : 3	Нов. ЦФ <Max.> = 1276.923		
ВВОДИМ : X3	со стоим. = 6.153846	ВЫВОДИМ: S3	Стр. 3

3. Выводы

На основе анализа таблицы результата можно сделать следующие выводы:

1. Оптимальным является выпуск продукции x_1 в количестве 120кг, продукции x_2 в количестве 4,6254кг, продукции x_3 – 6,1538кг.
2. Выпуск продукции П4,П5 находится на нижнем пределе заданного граничного условия, равного нулю ($x_4=0, x_5=0$) и не является рентабельным.
3. Наибольший резерв, равный 903,0769кг имеет ресурс по полуфабрикатам. Кроме того, имеется резерв по отделочным работам в количестве 401,5385 норм. часов.
4. Наиболее дефицитными являются токарные работы: их увеличение на 1 приведет к увеличению дохода на $y_2=0,4396$ рублей.

На основе анализа устойчивости коэффициентов целевой функции можно определить, в каких пределах изменяется удельная прибыль.