Лабораторная работа №2

<u>*Тема:*</u> *Целочисленное линейное программирование.*

Цель работы: знакомство с задачами целочисленного линейного программирования, изучение различных методов решения в системе компьютерной математики.

1. Краткие теоретические сведения

Типичная задача целочисленного программирования имеет вид:

Пример 1. (Распределение капиталовложений)

Оценивается пять проектов с точки зрения их возможного финансирования на предстоящий трехлетний период. Следующая таблица содержит ожидаемую прибыль от реализации каждого проекта и распределение необходимых капиталовложений по годам.

Проект	Расходы (млн. долл./год)			Прибыль (млн. долл.)
	1-й год	2-ой год	3-й год	
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30
Доступный капитал (млн. долл.)	25	25	25	

Предполагается, что каждый утвержденный проект будет реализован за трехлетний период. Необходимо определить совокупность проектов, которой соответствует максимум суммарной прибыли.

Методы решения задач целочисленного линейного программирования основаны на использовании вычислительных возможностей методов линейного программирования. Обычно алгоритмы целочисленного программирования включают три шага.

Шаг 1. "Ослабление" пространства допустимых решений задачи целочисленного линейного программирования путем замены любой двоичной переменной y непрерывным ограничением $0 \le y \le 1$ и отбрасывания требования целочисленности для всех остальных переменных. В результате получается обычная задача линейного программирования.

Шаг 2. Решение задачи линейного программирования и определение ее оптимального решения.

Шаг3. Имея полученное (непрерывное) оптимальное решение, добавляем специальные ограничения, которые итерационным путем изменяют пространство допустимых решений задачи линейного программирования таким образом, чтобы в конечном счете получилось оптимальное решение, удовлетворяющее требованиям целочисленности.

Разработаны два общих метода генерирования специальных ограничений, о которых идет речь при реализации шага 3.

1. Метод ветвей и границ.

2. Метод отсекающих плоскостей.

Хотя ни один из упомянутых методов не дает надежных результатов при решении задачи целочисленного линейного программирования, опыт вычислений свидетельствует, что метод ветвей и границ более успешно решает задачу, чем метод отсекающих плоскостей.

1.1. Метод ветвей и границ

Предположим, что рассматривается задача максимизации. Зададим нижнюю границу оптимального значения целевой функции z задачи ЦЛП равной $-\infty$. Положим i = 0.

Шаг 1. (Зондирование и определение границы).

Выбираем i - ю подзадачу линейного программирования ЛПi для исследования. Решаем ЛПi и зондируем ее, при этом возможна одна из трех ситуаций, a) Оптимальное значение целевой функции задачи ЛПi не может улучшить текущей нижней границы.

b) ЛПi приводит к лучшему допустимому целочисленному решению, чем текущая нижняя граница.

c) ЛПi не имеет допустимых решений.

Возможны два случая.

a) Если задача ЛПi прозондирована, нижняя граница изменяется только при условии, что найдено лучшее решение задачи ЦЛП. Если все подзадачи прозондированы, необходимо закончить вычисления: оптимальным решением задачи ЦЛП является то, которое соответствует текущей нижней границе, если такая существует. Иначе положить i = i + 1 и повторить шаг 1.

b) Если задача ЛПi не прозондирована, переходим к шагу 2 для выполнения ветвления.

Шаг 2. (Ветвление).

Выбираем одну из целочисленных переменных x_j, оптимальное значение x_j* которой в оптимальном решении задачи ЛПi не является целым числом. Исключаем из пространства допустимых решений область $[x_j^*]<x_j<[x_j^*]+1$ (где [v] — наибольшее целое, не превосходящее v) путем формирования двух подзадач ЛП, которые соответствуют ограничениям $x_j \le [x_j^*]$ и $x_j \ge [x_j^*]+1$. Положим $i=i+1$ и переходим к шагу 1.

1.2.Метод отсекающих плоскостей

Данный метод, как и метод ветвей и границ, начинает работу с оптимального решения "обычной" (непрерывной) задачи линейного программирования. Однако вместо ветвления и построения границ этот метод видоизменяет пространство допустимых решений, последовательно прибавляя специальным образом построенные ограничения (именуемые отсечениями). Рассмотрим сначала идею этого метода на графическом примере, а затем покажем, как отсечения строятся алгебраически.

Алгебраический способ определения отсечений. Метод отсекающих плоскостей начинает работу с решения непрерывной задачи линейного программирования. В симплекс-таблице, соответствующей оптимальному решению задачи линейного программирования, следует выбрать одну из строк (называемую производящей), для которой базисная переменная нецелочисленная. Искомое отсечение строится на основании дробных составляющих коэффициентов производящей строки. По этой причине его называют дробным отсечением.

Пример 2. Построение отсечения.

Максимизировать $z.=-7x_1 + 10x_2$

при ограничениях

$-x_1+ 3x_2 \leq 6$,

$7x_1 +x_3\leq 35$,

x1, x2 ≥ 0 и целые.

При дополнительных переменных x_3 и x_4 Для ограничений 1 и 2 задачи из примера оптимальная симплекс-таблица соответствующей задачи линейного программирования имеет следующий вид.

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	Решение
z	0	0	63/22	31/22	66.5
x_2	0	1	7/22	1/22	3.5
x_1	1	0	-1/22	3/22	4.5

Оптимальным непрерывным решением является x_1=4.5, x_2=3.5, x_3= 0, x_4=0 и z=66.5, Целочисленное отсечение получается в предположении, что все переменные задачи являются целочисленными. Заметим также, так как коэффициенты исходной целевой функции являются целочисленными, то и значение z, соответствующее целочисленному решению, должно быть целочисленным.

Информация, содержащаяся в симплекс-таблице, соответствующей оптимальному решению, может быть записана в виде следующих уравнений,

z - уравнение:

$z + 63/22* x_3 + 31/22*x_4 = 66*1/2$,

x2 - уравнение:

$x_2 + 7/22*x_3 + 1/22*x_4 = 3* 1/2$,

x1 - уравнение:

$x_1 - 1/22*x_3 + 3/22*x_4 = 4*1/2$.

Так как в этом примере z, x_1и x_2 должны быть целочисленными и все они на данный момент имеют дробные значения в оптимальной симплекс-таблице, любое из трех уравнений можно использовать в качестве производящей строки для построения отсечения. Выберем (произвольно) для этой цели z - уравнение.

$z + 63/22*x_3 + 31/22*x_4 = 66*1/2$ (производящая z -строка).

Для построения дробного отсечения каждый из нецелочисленных коэффициентов раскладывается на целую и дробную части при условии, что дробная часть является строго положительной.

Например,

$5/2 = (2 + 1/2)$,

$-7/3 = (-3 + 2/3)$

Разложение коэффициентов производящей z - строки приводит к следующему уравнению.

$z + (2 + 19/22)x_3+ (1 + 9/22)x_4= (66 + 1/2)$.

При переносе всех целочисленных слагаемых в левую часть уравнения, а всех дробных слагаемых в правую часть получаем следующее.

$z + 2x_3 + x_4 - 66 = 1/2 - 19/22*x_3 - 9/22*x_4$

Поскольку все переменные в рассматриваемой задаче принимают целочисленные значения, левая часть последнего уравнения должна быть целочисленной, откуда следует, что и правая часть также должна принимать целые значения. Перепишем ее следующим образом.

$1/2 - 19/22*x_3 - 9/22*x_4 = 1/2 - (19/22*x_3 + 9/22*x_4)$.

Поскольку x_3, x_4 ≥ 0 выражение в скобках является неотрицательным.

Поэтому величина 1/2 - $19/22*x_3$ - $9/22*x_4$, будучи целочисленной, не может превышать 1. Следовательно, необходимое условие целочисленности можно записать следующим образом.

$1/2 - 19/22*x_3 - 9/22*x_4 \leq 0$.

Это и есть отсечение, порожденное z - строкой. Нетрудно убедиться, что ранее найденное оптимальное непрерывное решение $x_1 = 41$, $x_2 = 31$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ не удовлетворяет отсечению. Действительно, так как $x_3 = x_4 = 0$, отсечение не удовлетворяется (оно приводит к неравенству $1 \leq 0$). Следовательно, если мы присоединим отсечение к конечной симплекс-таблице, то оптимальное решение новой симплекс-таблицы будет "двигаться" в направлении выполнения ограничения целочисленности.

2. Задание на лабораторную работу

2.1. Ознакомиться с методами решения задачи целочисленного линейного программирования.

2.2. В соответствии с вариантом задания, определенным преподавателем, составить программы, реализующие метод решения.

2.3. Оформить отчет о выполнении задания с приведением условия задачи, алгоритмов и программ указанных методов, результаты решения.

3. Варианты заданий

1. В модели распределения капиталовложений из примера 9.2-1 предположим, что проект 5 должен быть обязательно выбран, если выбирается либо проект 1, либо 3. Измените математическую модель, включив в нее новое ограничение, и решите полученную задачу.

2. Рассмотрите задачу о загрузке самолета грузами пяти типов. Вес w_j, объем v_j, а также стоимость r_i единицы груза каждого типа приведены в следующей таблице.

Груз i	Вес единицы груза, wj (тонны)	Объем единицы груза, v_j, (куб. ярд)	Стоимость единицы груза, r_i, (в $100)
1	5	1	4
2	8	8	7
3	3	6	6
4	2	5	5
5	7	4	4

Максимальная грузоподъемность и объем самолета равны 112 тонн и 109 куб, ярдов соответственно. Сформулируйте в виде модели ЦЛП задачу определения набора грузов, обеспечивающего максимальную стоимость груза, и найдите решение.

3. Пусть есть 7 полных бутылок вина, 7 бутылок, заполненных наполовину, и 7 пустых бутылок. Необходимо распределить 21 бутылку между тремя персонами так, чтобы каждый получил 7 бутылок. В то же время каждый должен получить одинаковое количество вина. Сформулируйте эту задачу в виде задачи ЦЛП с ограничениями в виде равенств

и найдите решение. (Совет. Используйте фиктивную целевую функцию, все коэффициенты которой равны нулю.)

4. Эксцентричный шейх оставил завещание относительно распределения стада верблюдов между тремя детьми: Тарик получает не менее половины стада, Шариф -не менее одной трети, а Маиса — по меньшей мере одну девятую часть. Остаток завещался благотворительной организации. В завещании не упоминался размер стада, говорилось лишь, что количество верблюдов — число нечетное и благотворительная организация получает в точности одного верблюда. Сколько верблюдов оставил шейх и сколько получил каждый из его детей?

5. Супружеская пара фермеров посылает трех своих сыновей на базар продать 90 яблок, для того чтобы обучить их числам и обращению с деньгами. Самый старший Джим получил для продажи 50 яблок, Билл (средний) — 30 и самый младший Джон — лишь 10. Родители поставили пять условий. I) Цена яблок должна быть равна либо $1 за 7 яблок, либо $3 за 1 яблоко. 2) Каждый ребенок может использовать один или оба варианта цен. 3) Все дети должны вернуться с одинаковой суммой денег. 4) Каждый ребенок приносит домой сумму, которая является четным числом (без центов). 5) Сумма денег, полученная каждым из детей, должна быть максимальной при сформулированных условиях. Считается, что дети могут продать все яблоки, которые они имеют. Как дети могут выполнить требования своих родителей?

6. Когда-то был капитан торгового судна, который хотел наградить трех членов команды за их героические усилия по спасению груза корабля во время неожиданного шторма. Капитан взял некоторую сумму денег у казначея и отдал приказ старшему помощнику распределить их поровну между тремя матросами после того, как корабль достигнет берега. Однажды ночью один из матросов решил взять свою (справедливую) третью часть заранее. После деления денег на три равные части осталась одна монета, которую матрос решил оставить себе (в дополнение к третьей части денег). На следующую ночь второй матрос решил осуществить такой же план и, повторив деление на три части оставшейся суммы, присвоил себе еще и монету, которая осталась после деления. На третью ночь третий матрос взял третью часть того, что осталось, и одну дополнительную монету, которая осталась после деления- Когда корабль достиг берега, старший помощник капитана разделил остаток денег поровну между тремя матросами и снова осталась одна монета. Старший помощник отложил эту монету в сторону и вручил матросам предназначенные им равные части. Сколько денег было в самом начале? Сформулируйте задачу в виде задачи ЦЛП и найдите оптимальное решение. (Совет Задача имеет бесконечно много целочисленных решений. Предположите для удобства, что следует определить минимальную сумму денег, которая удовлетворяет условиям задачи. Увеличивая затем полученное решение на 1, рассмотрите его как нижнюю границу и получите новое минимальное решение. Продолжая таким образом, можно наметить шаблон общего решения.)

7. Имеются следующие слова, состоящие из трех букв: AFT, FAR, TVA, ADV, JOE, FIN, OSF и KEN. Предположим, что буквам алфавита приписаны числа (метки), начиная с A = 1 и заканчивая Z = 26. Каждое слово помечается числом, равным сумме числовых меток составляющих его трех букв. Например, слово AFT имеет метку 1 + 6 + 20 = 27. Необходимо выбрать пять из заданных восьми слов таким образом, чтобы получить максимальную суммарную метку. Вместе с тем выбранные пять слов должны удовлетворять следующему условию: (сумма меток первых букв) < (сумма меток вторых букв) < (сумма ме-

ток третьих букв). Сформулируйте задачу в виде задачи ЦЛП и найдите ее оптимальное решение.

8. Фирма, специализирующаяся на грамзаписи песен, заключила договор с восходящей звездой эстрады на запись восьми песен. Продолжительность песен равна 8, 3, 5, 5, 9, 6, 7 и 12 минут соответственно. Фирма планирует использовать для записи двусторонние кассеты. Каждая сторона имеет длительность звучания 30 минут. Фирма намерена распределить песни на две стороны кассеты сбалансированным образом. Это значит, что продолжительность звучания песен на каждой стороне кассеты должна быть примерно одинаковой (насколько это возможно). Сформулируйте задачу в виде задачи ЦЛП и найдите оптимальное решение.

9. Рассмотрите задачу из предыдущего упражнения в предположении, что характер мелодий песен диктует условия, согласно которым третья и четвертая песни не могут быть записаны на одной стороне кассеты. Сформулируйте задачу в виде задачи ЦЛП. Возможно ли использование 25-минутной (для каждой стороны) кассеты для записи 8 песен? Если нет, используйте модель ЦЛП, чтобы определить минимальную емкость кассеты для записи.

10(1). Компания планирует производство некоторой продукции на трех станках, которой должно быть изготовлено не менее 2000 единиц. Минимальная производительность любого станка равна 500 единиц. Следующая таблица содержит необходимую информацию для рассматриваемой задачи.

Станок	Расходы на переналадку	Затраты на производство единицы продукции	Производительность (в единицах продукции)
1	300	2	600
2	100	10	800
3	200	5	1200

Сформулируйте задачу в виде задачи ЦЛП и найдите ее оптимальное решение.

11(2). Нефтедобывающая компания изучает вопрос о бурении четырех нефтяных скважин на двух нефтеносных участках. Издержки подготовки к бурению на каждом участке и затраты на бурение скважины j на участке i (i=1,2;j=1, 2, 3, 4) приведены в следующей таблице.

Участок	Затраты на бурение скважины (млн долл.)				Издержки подготовки к бурению (млн долл.)
	1	2	3	4	
1	2	1	8	5	5
2	4	6	3	1	6

Сформулируйте задачу в виде задачи ЦЛП и найдите ее оптимальное решение.

12(3). Рассматриваются три промышленных участка для размещения обрабатывающих заводов, которые снабжают своей продукцией трех потребителей. Объемы производства продукции, объемы потребления и себестоимость перевозки продукции от заводов к потребителям содержатся в следующей таблице.

1	2	3	Объем производства

1	\$10	\$15	\$12	1800
2	\$17	\$14	\$20	1400
3	\$15	\$10	\$11	1300
Спрос	1200	1700	1600	

В дополнение к транспортным, имеются еще фиксированные затраты в объеме 10 000, 15 000 и 12 000 долларов, связанные с 1, 2 и 3 заводом соответственно. Сформулируйте задачу в виде задачи ЦЛП и найдите ее оптимальное решение.

13(1). Менеджер проектов имеет 10 сотрудников, которые работают над шестью проектами, причем каждый работает одновременно над несколькими проектами, как показано в следующей таблице.

	Проект					
	1	2	3	4	5	6
1		X		X	X	
2	X		X		X	
3		X	X	X		X
4			X	X	X	
5	X	X	X			
6	X	X	X	X		X
7	X	X			X	X
8	X		X	X		
9					X	X
10	X	X		X	X	X

Менеджер должен встретиться с каждым из 10 сотрудников один раз в неделю для обсуждения их проблем. Беседа с каждым из них длится примерно 20 минут, т.е. на разговоры со всеми сотрудниками уходит 3 часа 20 минут. Предлагается проводить встречи менеджера с группами сотрудников, работающих над одним и тем же проектом, чтобы уменьшить суммарное время, затрачиваемое на совещания. Менеджер планирует составить график обсуждения проектов таким образом, чтобы уменьшить движение в офисе, т.е. сократить число сотрудников, входящих и выходящих из комнаты для совещаний. В какой последовательности необходимо рассматривать проекты?

14(2). Продавец книг, проживающий в городе А, один раз в месяц должен посетить своих четырех клиентов, которые проживают в городах Б, В, Г и Д соответственно. Приведенная ниже таблица содержит расстояния в милях между различными городами.

	А	Б	В	Г	Д
А	0	120	220	150	210
Б	120	0	80	ПО	130
В	220	110	0	160	185
Г	150	ПО	160	0	190
Д	210	130	185	190	0

Необходимо составить маршрут движения продавца книг, минимизирующий суммарное пройденное расстояние. Сформулируйте задачу в виде задачи ЦЛП. 3. Пусть в предыдущем упражнении города Б, В, Г и Д обозначены через 1, 2, 3 и 4, а город А разделен на два, которые обозначены через 0 и 5. Пусть маршрут продавца книг начинается в городе 0, проходит (в некотором порядке) через города 1,2, 3 и 4 и заканчивается в городе 5. Определим переменную v_i для города i (i = 0, 1,..., 5), которая удовлетворяет условиям $0 \le v_i \le 5$. Пусть $x_{ij} = 1$, если в маршруте городу следует за городом i, и 0 в противном случае. Покажите, что ограничения

$v_i - v_j + 5x_{ij} \le 4$, i = 0,1,...,4, j =1,2,....5, гарантируют исключение всех неполных маршрутов в решении задачи.

15(1). Компания АВС занимается доставкой грузов пяти потребителям. Можно выбрать следующие маршруты перевозки грузов.

Маршрут 1. 1,2, 3, 4.
Маршрут 2. 4, 3, 5.
Маршрут 3. 1,2, 5.
Маршрут 4. 2, 3, 5.
Маршрут 5. 1,4.2.
Маршрут 6. 1, 3, 5.

Эти маршруты определяются грузоподъемностью автомобиля, доставляющего грузы. Например, на маршруте 1 автомобиль имеет грузоподъемность, достаточную для доставки грузов лишь потребителям I, 2, 3 и 4. Следующая таблица содержит расстояния (в милях) между терминалом компании АВС и потребителями.

	ABC	1	2	3	4	5
ABC	0	10	12	16	9	8
1	10	0	32	8	17	10
2	12	32	0	14	21	20
3	16	8	14	0	15	18
4	9	17	21	15	0	11
5	8	10	20	18	11	0

Необходимо выполнить дневник поставки пяти потребителям, минимизируя при этом пройденный суммарный путь. Оптимальное решение можо быть таким, что один и тот же потребитель обслуживается более чем одним маршрутом. Но при реализации такого решения используется только один из этих маршрутов. Сформулируйте задачу в виде задачи ЦЛП и найдите оптимальное решение,.

16(2). Американский университет формирует комитет по рассмотрению жалоб студен тов. В соответствии с указаниями, полученными из администрации, в эту комиссию необходимо включить по крайней мере одну женщину, одного мужчину, од кого студента, одного администратора и одного преподавателя. Выдвинуты десять кандидатур (обозначенных для удобства буквами от а до j). Принадлежность этих кандидатур к различным категориям отражена в следующей таблице.

Категория	Кандидатуры
Женщины	a, b, c, d, e
Мужчины	f, g, h, i, j
Студенты	a, b, c, j
Администраторы	e, f
Преподаватели	d, g, h, i

Университет заинтересован создать наименьшую по составу комиссию, гарантирующую представительство каждой из указанных категорий. Сформулируйте задачу в виде задачи ЦЛП и найдите ее оптимальное решение.

17(3). Округ Вашингтон определил шесть городов, которые нуждаются в службе скорой помощи. Станции скорой помощи могут быть расположены в некоторых или во всех шести городах. Однако в силу территориальной близости некоторых городов одна станция может обслуживать более одного населенного пункта Единственным условием является время поездки; оно не должно превышать 15 минут. Приведенная ниже таблица содержит время поездки в минутах между шестью городами.

	1	2	3	4	5	6
1	0	23	14	18	10	32
2	23	0	24	13	22	11
3	14	24	0	60	19	20
4	18	13	60	0	55	17
5	10	22	19	55	0	12
6	32	11	20	17	12	0

Сформулируйте задачу в виде задачи ЦЛП, оптимальное решение которой определит наименьшее количество станций и их расположение. Найдите оптимальное решение.

18(4). Сокровища короля Тута находятся в музее в Новом Орлеане. План музея, состоящего га нескольких комнат, соединенных открытыми дверями, показан на рис. 9.3. Сторож, находящийся у двери, может наблюдать за двумя смежными комнатами. Администрация музея заинтересована, чтобы в каждой комнате присутствовал сторож, используя при этом минимальное их число. Сформулируйте задачу в виде задачи ЦЛП и найдите ее оптимальное решение.

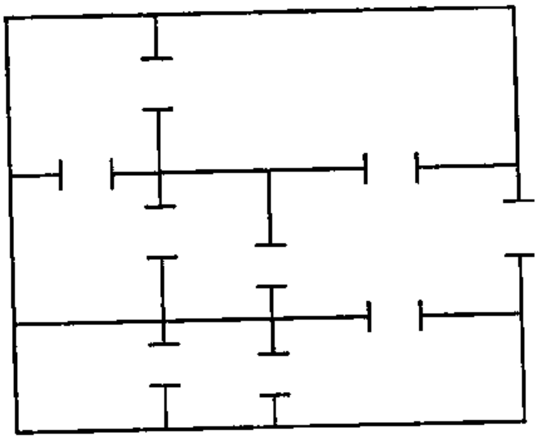

Рис. 9.3

19(1). Игральная доска состоит из девяти равных квадратов, расположенных 3x3. Требуется заполнить каждый квадрат числом из интервала от 1 до 9 таким образом, чтобы сумма чисел каждой строки, каждого столбца и каждой диагонали была равна 15. Определите числа в каждом квадрате для следующих случаев.

a) Числа в каждой строке и каждом столбце различны.

b) Числа во всех квадратах различны.

Запишите сформулированную задачу в виде задачи ЦЛП с ограничениями и решите ее.

20(2). Станок используется для производства двух взаимозаменяемых видов продукции. Производительность станка позволяет за день изготовить не более 20 единиц продукции первого вида и 10 единиц второго вида. Существует альтернативная настройка станка, позволяющая ежедневно изготовлять не более 12 единиц продукции вида I и 22 единицы вида 2. Анализ рынка показывает, что максимальный суммарный спрос на два вида продукции составляет 35 единиц ежедневно. Предположим, что прибыль от производства единицы продукции первого и второго вида составляет 10 и 12 долларов соответственно. Какая из двух возможных настроек станка должна быть выбрана? Сформулируйте задачу в виде задачи ЦЛП и решите ее. (Примечание Сформулированная двухмерная задача может быть решена путем перебора возможных решений после графического построения пространства допустимых решений. Этого нельзя сделать в n - мерной задаче.)

21(3). Некая компания производит три вида продукции. Ежедневные временные затраты и потребности сырья, необходимые на изготовление одной единицы продукции, приведены в следующей таблице.

Продукция	Необходимое время (час./ед.)	Необходимое сырье (фунты/ед.)
1	3	4
2	4	3
3	5	6

Доходы от производства единицы каждого вида продукции равны 25, 30 и 22 доллара соответственно. Компания имеет возможность организовать выпуск этой продукции в двух цехах своего производства. Цехи отличаются главным образом ресурсом рабочего времени и сырья, как показывает следующая таблица.

Цех	Ресурс рабочего времени (часов в рабочий день)	Ресурс сырья (фунты в день)
1	100	100
2	90	120

Сформулируйте задачу в виде задачи частично-целочисленного линейного программирования для оптимального размещения производства по цехам.

22(4). Рассмотрите задачу планирования производственной линии, связанной с изготовлением двух различных изделий на одном станке Последовательность выполнения необходимых для этого восьми операций изображена на рис. 9.4. Пусть p_j — время выполнения j -й операции (j = 1,2,..., n). Сроки сдачи изделий типа 1 и 2, которые определяются исходя из некоторого исходного момента, равны d_1 и d_2 соответственно. Предполагается, что любая выполняемая на станке операция должна быть завершена до начала другой операции. Сформулируйте задачу в виде задачи частично-целочисленного линейного программирования.

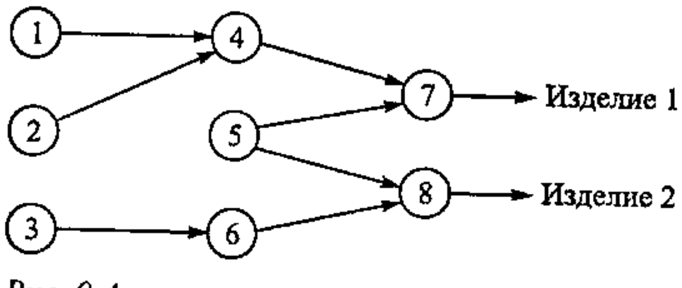

Рис 9 4

23(5). Компания владеет фабрикой, которая производит изделия трех типов. Необходимые трудовые затраты и потребности сырья для производства одной единицы каждого из трех типов изделий приведены в следующей таблице.

Тип изделия	Необходимое время (час./ед)	Необходимое сырье (фунты/ед)
1	3	4
2	4	3
3	5	6
Наличный дневной объем	100	100

Доходы от производства единицы каждого из трех типов изделий равны 25, 30 и 45 долларов соответственно. Если будет производиться изделие типа 3, то его ежедневный объем производства должен быть не менее 5 единиц. Сформулируйте задачу в виде задачи частично-целочисленного линейного программирования и найдите оптимальное решение.

24(6). Опишите невыпуклые заштрихованные области допустимых решений, которые изображены на рис. 9.5, в виде набора одновременно выполняющихся ограничений. Найдите оптимальное решение, которое максимизирует целевую функцию $z = 2x_1 + 3x_2$ при ограничениях, определяющих область, изображенную на рис. 9 5,а.

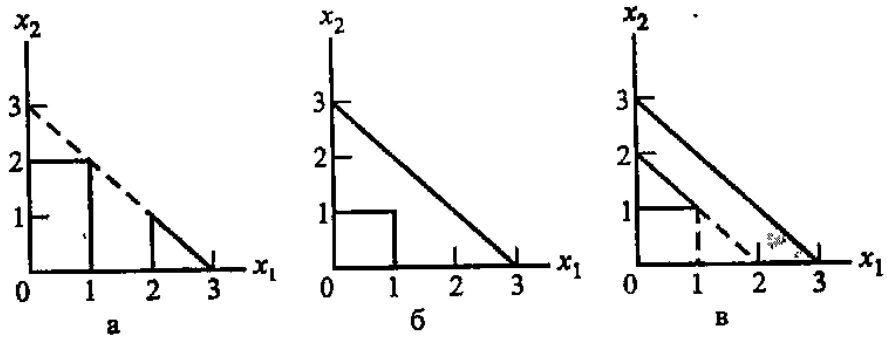

Рис 9.5

7. Пусть требуется, чтобы любые А ограничений из следующих m ограничений были активными.

$g_1 (x_1, x_2,..., x_n) \le b_1, \quad i = 1,2,..., m.$

Покажите, как это сделать

24(8). Правая часть следующего ограничения может принимать одно из значений b_1, b_2, ..., b_m, т.е.
$g (x_1, x_2,..., xn) \le b_1, b_2$, .. или $b_т$. Покажите, как можно представить это ограничение.

25(1). Решите задачу ЦЛП из примера 9.3-1 методом ветвей и границ, начиная с переменной x_2 как переменной ветвления. Решите подзадачи с помощью программы TORA, используя опцию MODIFY (Изменить) для задания верхней и нижней границ. Начните с решения подзадачи, включающей ограничение $x_2 <= [x_2']$.

26(2). Постройте дерево подзадач, получаемое при использовании метода ветвей и границ для каждой из приведенных ниже задач. Для удобства в нулевом узле в качестве переменной ветвления всегда выбирайте x_1.

а) Максимизировать $2 = 3x_1 + 2x_2$
при ограничениях
$2x_1 + 2x_1 \le 9$,
$3x_1 + 3x_2 \le 18$,
$x_1, x_2 \ge 0$ и целые.

b) Максимизировать $z = 2x_1 + 3x_2$
при ограничениях
$5x_1 + 7x_1 \le 35$,
$4x_1 + 9x_2 \le 36$,
$x_1, x_2 \ge 0$ и целые.

с) Максимизировать $z = x_1 + x_2$
при ограничениях
$2x_1 + 5x_2 \le 16$,
$6x_1 + 5x_2 \le 27$,
$x_1, x_2 \ge 0$ и целые.

ё) Минимизировать $z = 5x_1 + 4x_2$
при ограничениях
$3x_1 + 2x_2 \ge 5$,
$2x_1 + 3x_2 \ge 7$,
$x_1, x_2 \ge 0$ и целые.

е) Максимизировать $z = 5x_1 + 7x_2$
при ограничениях
$2x_1+x_2 \le 13$,
$6x_1 + 9x_2 \le 41$,
$x_1, x_2 \ge 0$ и целые.

27(3). Решите задачи из предыдущего упражнения, предполагая, что на переменную x_1не накладывается условие целочисленности.

28(4). Покажите графически, что следующая задача ЦЛП не имеет допустимых решений, а затем проверьте этот результат с помощью метода ветвей и границ.
Максимизировать $z = 2x_1 + x_2$
при ограничениях
$10x_1 + 10x_2 \leq 9$,
$10x_1 + 5x_2 \geq 1$,
$x_1, x_2 \geq 0$ и целые.

29(5). Решите следующие задачи с использованием метода ветвей и границ.
a) Максимизировать $z = 18x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 4x_4$
при ограничениях
$15x_1 + 12x_2 + 7x_3 + 4x_4 + x_5 \leq 37$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0$ ИЛИ 1.

b) Максимизировать $z = x_1 + 2x_2 + 5x_3$
при ограничениях
$|-x_1 + 10x_2 - 3x_3| \geq 15$,
$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 10$,
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ и целые.

30(1). В примере 9.3-4 покажите графически, может ли каждое из следующих ограничений служить в качестве правильного отсечения.
a) $x1 + 2x_2 \leq 10$.
b) $2x_1 + x_2 \leq 10$.
c) $3x_2 \leq 10$.
d) $3x_1, + x_2 \leq 15$.

30(2). В примере 9.3-4 покажите графически, как следующие два правильных отсечения могут привести к оптимальному целочисленному решению.
Отсечение I. $x_1 + 2x_2 \leq 10$.
Отсечение II. $3x_1 + x_2 \leq 15$.

31(1). Запишите отсечения I и II в примере 9.3-5 через уравнения для переменных x_1 и x_2 и покажите, что они совпадают с отсечениями, которые графически показаны на рис. 9.13.

32(2). Покажите, что дробное отсечение не приводит к допустимому решению в приведенной ниже задаче, если не устранены все дроби в ограничении.
Максимизировать $z = x_1 + 2x_2$

при ограничениях

$x_1 + 1/2 * x_2 \leq 13/4$,
$x_1, x_2 \geq 0$ и целые

33(3). Решит следующие задачи методом дробного отсечения и сравните оптимальное целочисленное решение с решением, полученным путем округления соответствующего оптимального непрерывного решения,

a) Максимизировать $z = 4x1 + 6x_2 + 2x_3$
при ограничениях
$4x_1-4x_2 \leq 5$,
$-x_1 + 6x_2 \leq 5$,
$-x_1+x_2+x_3 \leq 5$,
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ и целые.

b) Максимизировать $z = 3x_1+x_2 + 3x_3$
при ограничениях
$-x_1+2x_2+x_3 \leq 4$,
$4x_2 - 3x_3 \leq 2$,
$x_1-3x_2 + 2x_3 \leq 3$,
$x_1,x_2,, x_3 = 0$ или 1.