Лабораторная работа №4

<u>*Тема:*</u> *Динамическое программирование.*
Цель работы: знакомство с задачами динамического программирования, изучение различных методов решения в системе компьютерной математики.

1. Краткие теоретические сведения

1.1 Общая схема решения задач динамического программирования.

Для решения задач динамического программирования необходимо выполнить следующие действия:

1. Определить этапы.
2. Определить на каждом этапе вариантов решения (альтернатив).
3. Определить состояния на каждом этапе.

Из перечисленных выше элементов понятие состояния, как правило, представляется весьма сложным для восприятия. Рассмотренные в этом разделе приложения последовательно показывают, что определение состояния меняется в зависимости от моделируемой ситуации. При рассмотрении каждого приложения полезно ответить на следующие вопросы.

1. Какие соотношения связывают этапы вместе?
2. Какая информация необходима для того, чтобы получить допустимые решения на текущем этапе без повторной проверки решений, принятых на предыдущих этапах?

1.2. Задача о загрузке

Задача о загрузке — это задача о рациональной загрузке судна (самолета, автомашины и т.п.), которое имеет ограничения по объему или грузоподъемности. Каждый помещенный на судно груз приносит определенную прибыль. Задача состоит в определении загрузки судна такими грузами, которые приносят наибольшую суммарную прибыль.

Перед тем как представить соотношения динамического программирования, заметим, что рассматриваемая здесь задача известна также как задача о снаряжении, где пилот реактивного самолета должен определить наиболее ценные (необходимые) предметы, которые следует взять на борт самолета, или как задача о рюкзаке, в которой солдат (или турист) должен определить наиболее ценные предметы, подлежащие загрузке в ранец (рюкзак), Кажется, что три упомянутых названия для одной и той же задачи были выбраны для того, чтобы гарантировать равное представительство военно-морского флота, воздушных сил и армии!

Рекуррентное уравнение процедуры обратной прогонки выводится для обшей задачи загрузки судна грузоподъемностью W предметов (грузов) n наименований. Пусть m_i — количество предметов i–го наименования, подлежащих загрузке, r_i — прибыль, которую приносит один загруженный предмет i–го наименования, w_i — вес одного предмета i–го наименования. Общая задача имеет вид следующей целочисленной задачи линейного программирования.

Максимизировать $z=r_1m_1+r_2m_2+...+r_nm_n$ при условии, что

$$w_1m_1+w_2m_2+...+w_nm_n \le W,$$

$$m_1,m_2,...,m_n \ge 0 \text{ и целые.}$$

Три элемента модели динамического программирования определяются следующим образом.

1. Этап i ставится в соответствие предмету i–го наименования, $i = 1, 2,..., n$.
2. Варианты решения на этапе i описываются количеством m_i, предметов i–го наименования, подлежащих загрузке. Соответствующая прибыль равна r_im_i. Значение m_i заключено в пределах от 0 до $[W/w_i]$, где $[W/w_i]$ — целая часть числа W/w_i.
3. Состояние x_i на этапе i выражает суммарный вес предметов, решения о погрузке которых приняты на этапах i, i+1, ..., n. Это определение отражает тот факт, что ограничение по весу является единственным, которое связывает п этапов вместе.

Пусть $f_i(x_i)$ — максимальная суммарная прибыль от этапов i, i+1, ..., n при заданном состоянии x_i. Проще всего рекуррентное уравнение определяется с помощью следующей двухшаговой процедуры.

Шаг 1. Выразим $f_i(x_i)$ как функцию $f_{i+1}(x_{i+1})$ в виде

$$f_i(x_i) = \max_{\substack{m_i=0,1..[w/w_n] \\ x_i=0,1..,W}} \{r_i m_i + f_{i+1}(x_{i+1})\}, i = 1,2..n$$

где $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$.

Шаг 2. Выразим x_{i+1} как функцию x_i для гарантии того, что левая часть последнего уравнения является функцией лишь x_i. По определению x_i—x_{i+1} представляет собой вес, загруженный на этапе i, т.е. $x_i+x_{i+1}=w_i m_i$ или $x_{i+1}=x_i-w_i m_i$. Следовательно, рекуррентное уравнение приобретает следующий вид.

$$f_i(x_i) = \max_{\substack{m_i=0,1..[w/w_n] \\ x_i=0,1..,W}} \{r_i m_i + f_{i+1}(x_i - w_i m_i)\}, i = 1,2..n$$

1.3. Задача планирования рабочей силы

При выполнении некоторых проектов число рабочих, необходимых для выполнения какого-либо проекта, регулируется путем их найма и увольнения. Поскольку как наем, так и увольнение рабочих связано с дополнительными затратами, необходимо определить, каким образом должна регулироваться численность рабочих в период реализации проекта.

Предположим, что проект будет выполняться в течение n недель и минимальная потребность в рабочей силе на протяжении i–й недели составит b_i рабочих. При идеальных условиях хотелось бы на протяжении i–й недели иметь в точности b_i рабочих. Однако в зависимости от стоимостных показателей может быть более выгодным отклонение численности рабочей силы как в одну, так и в другую сторону от минимальных потребностей. Если x_i — количество работающих на протяжении i–й недели, то возможны затраты двух видов: 1) $C_1(x_i-b_i)$ — затраты, связанные с необходимостью содержать избыток x_i-b_i рабочей силы и 2) $C_2(x_i-x_{i-1})$ — затраты, связанные с необходимостью дополнительного найма x_i-x_{i-1} рабочих.

Элементы модели динамического программирования определяются следующим образом.

1. Этап i представляется порядковым номером недели i, i=1,2,.., n.
2. Вариантами решения на i–м этапе являются значения x_i – количество работающих на протяжении i–й недели.
3. Состоянием на i–м этапе является x_i – количество работающих на протяжении (i–1)–й недели (этапа).

Рекуррентное уравнение динамического программирования представляется в виде

$$f_i(x_{i-1}) = \max_{x_{i1} \geq b_i}\{C_1(x_i - b_i) + C_2(x_i - x_{i-1}) + f_{i+1}(x_i)\}, i = 1,2,..n,$$

где $f_{n+1}(x_n) \equiv 0$. Вычисления начинаются с этапа n при $x_n=b_n$ и заканчиваются на этапе 1.

1.4. Задача замены оборудования

Чем дольше механизм эксплуатируется, тем выше затраты на его обслуживание и ниже его производительность. Когда срок эксплуатации механизма достигает определенного уровня, может оказаться более выгодной его замена, Задача замены оборудования, таким образом, сводится к определению оптимального срока эксплуатации механизма.

Предположим, что мы занимаемся заменой механизмов на протяжении n лет. В начале каждого года принимается решение либо об эксплуатации механизма еще один год, либо о замене его новым. Обозначим через $r(t)$ и $c(t)$ прибыль от эксплуатации t – летнего механизма на протяжении года и затраты на его обслуживание за этот же период. Далее пусть $s(t)$ — стоимость продажи механизма, который эксплуатировался t лет. Стоимость приобретения нового механизма остается неизменной на протяжении всех лет и равна I. Элементы модели динамического программирования таковы.

1. *Этап i* представляется порядковым номером года i, i = 1,2,..., n.

2. *Вариантами решения* на i-м этапе (т.е. для *i-го* года) являются альтернативы: *продолжить эксплуатацию* или *заменить* механизм в *начале i-го* года.

3. *Состоянием* на i-м этапе является срок эксплуатации t (возраст) механизма к началу i-го года.

Пусть $f_i(t)$ — максимальная прибыль, получаемая за годы от i до n при условии, что в начале *i-го* года имеется механизм t-летнего возраста. Рекуррентное уравнение имеет следующий вид.

$$f_i(t) - \max\begin{cases} r(t) - c(t) + f_{i+1}(t), \text{если эксплуатировать} \\ r(0) + s(t) - I - c(0) + f_{i+1}(1), \text{если заменить} \end{cases}$$

где $f_{n+1}(.)\equiv 0$.

1.5. Задача инвестирования

Предположим, что в начале каждого из следующих n лет необходимо сделать инвестиции P_1, P_2, ..., P_n соответственно. Вы имеете возможность вложить капитал в два банка: первый банк выплачивает годовой сложный процент r_1, а второй — r_2. Для поощрения депозитов оба банка выплачивают новым инвесторам премии в виде процента от вложенной суммы. Премиальные меняются от года к году, и для i-го года равны q_{i1} и q_{i2} в первом и втором банках соответственно. Они выплачиваются в конце года, на протяжении которого сделан вклад, и могут быть инвестированы в один из двух банков на следующий год. Это значит, что лишь указанные проценты и новые деньги могут быть инвестированы в один из двух банков. Размещенный в банке вклад должен находиться там до конца рассматриваемого периода. Необходимо разработать стратегию инвестиций на следующие n лет.

Элементы модели динамического программирования следующие.

1. Этап i представляется порядковым номером года i, i=1,2,..., n.

2. Вариантами решения на i-м этапе (для i-го года) являются суммы I_i и $\overline{I}_i$ инвестиций в первый и второй банк соответственно.

3. Состоянием x_i на i-м этапе является сумма денег на начало i-го года, которые могут быть инвестированы.

Заметим, что по определению $\overline{I}_i = x_i - I_i$. Следовательно,

$$x_i=P_i+q_{i-1,1}I_{i-1}+q_{i-1,2}(x_{i-1}-I_{i-1}) =$$
$$=P_i+(q_{i-1,1}-q_{i-1,2})I_{i-1}+q_{i-1,2}x_{i-1}.$$

где i=2,3,..., n, $x_1=P_1$. Сумма денег x_i, которые могут быть инвестированы, включает лишь новые деньги и премиальные проценты за инвестиции, сделанные на протяжении (i–1)-го года.

Пусть $f_i(x_i)$ — оптимальная сумма инвестиций для интервала от i-го до n-го года при условии, что в начале i-го года имеется денежная сумма x_i. Далее обозначим через s_i накопленную сумму к концу n-го года при условии, что I_i и (x_i-I_i) — объемы инвестиций на протяжении i-го года в первый и второй банк соответственно. Обозначая $\alpha_i=(1+r_i)$, i= 1,2, мы можем сформулировать задачу в следующем виде.

Максимизировать $z=s_1+s_2+...+s_n$, где

$$s_i=I_i\alpha_1^{n+1-i}+(x_i-I_i)\alpha_2^{n+1-i}=(\alpha_1^{n+1-i}-\alpha_2^{n+1-i})I_i+ \alpha_2^{n+1-i}x_i,\ i=1,2,...,n-1,$$
$$s_n=(\alpha_1+q_{n1}-\alpha_2-q_{n2})I_n+(\alpha_2+q_{n2})x_n.$$

Так как премиальные за i-й год являются частью накопленной денежной суммы от инвестиций, в выражения для s_n добавлены q_{n1} и q_{n2}.

Итак, в данном случае рекуррентное уравнение для обратной прогонки в алгоритме динамического программирования имеет вид

$$f_i(x_i) = \max_{0\le I_i\le x_i}\left\{s_i + f_{i+1}(x_{i+1})\right\},\ i=1,2,\dots,n-1,$$

где x_{i+1} выражается через x_i в соответствии с приведенной выше формулой, а $f_{n+1}(x_{n+1})\equiv 0$.

2. Задание на лабораторную работу

2.1. Изучить предлагаемые варианты задач.

2.2. В соответствии с вариантом задания, определенным преподавателем, составить схемы вычисления, реализующие метод, и найти решение.

2.3. Оформить отчет о выполнении задания с приведением условия задачи, схемы методов, результатов решения и заключения.

3. Варианты заданий

1. В 6-тонный самолет загружаются предметы трех наименований. Приведенная ниже таблица содержит данные о весе одного предмета w_i (в тоннах) и прибыли r_i (в тысячах долларов), получаемой от одного загруженного предмета. Как необходимо загрузить самолет, чтобы получить максимальную прибыль?

Предмет i	w_i	r_i
1	4	70
2	1	20
3	2	40

Так как вес одного предмета w_i для всех наименований и максимальный вес W принимают целочисленные значения, состояние x_i может принимать лишь целочисленные значения.

2. Решите предыдущую задачу о загрузке. Общая грузоподъёмность – 4 тонны.

Предмет i	w_i	r_i
1	1	30
2	2	60
3	3	80

3. Турист собирается в путешествие по дикой местности и должен упаковать в рюкзак предметы трех наименований: пищу, средства первой помощи и одежду. Объем рюкзака составляет 3 кубических фута. Каждая единица пищи занимает 1 кубический фут, упаковка средств первой помощи — четверть кубического фута, а отдельный предмет одежды— примерно половину кубического фута. Турист определил свои предпочтения весовыми коэффициентами 3, 4 и 5 — для пищи. средств первой помощи и одежды соответственно. Это означает, что одежда является самым ценным предметом среди остальных. Опыт подсказывает туристу, что он должен взять не менее одного предмета каждого наименования и не более двух комплектов средств первой помощи. Сколько единиц каждого наименования возьмет турист в поход?

4. Студент должен выбрать 10 факультативных курсов на четырех различных факультетах, причем на каждом факультете должен быть выбран по меньшей мере один курс. Эти курсы распределяются между факультетами таким образом, чтобы максимизировать объем "знаний". Студент оценивает знания по шкале в сто баллов и приходит к выводам, представленным в следующей таблице.

Факультет	Номер курса						
	1	2	3	4	5	6	≥7
I	25	50	60	80	100	100	100
II	20	70	90	100	100	100	100
III	40	60	80	100	100	100	100
IV	10	20	30	40	50	60	70

Какие курсы следует выбрать студенту?

5. У меня во дворе имеется небольшой огород 10×20 футов. Этой весной я собираюсь посадить овощи трех видов: помидоры, зеленые бобы и кукурузу. Огород разбит на ряды, длина которых равна 20 футам. Кукуруза и помидоры занимают ряды шириной 2 фута, а зеленые бобы — 3 фута. Помидоры мне нравятся больше, а бобы меньше. По 10-

балльной шкале предпочтений я бы присвоил помидорам 10 баллов, кукурузе— 7 баллов и зеленым бобам— 3 балла. Независимо от моих предпочтений, жена настаивает, чтобы я посадил не менее одного ряда зеленых бобов и не более двух рядов помидоров. Сколько рядов каждого вида овощей следует мне посадить?

6. "Жилище для Человечества"— прекрасная благотворительная организация, которая строит дома для бедствующих семей силами добровольцев. Такая семья может выбрать себе дом из трех типоразмеров: 1000, 1100 и 1200 квадратных футов. Дом каждого типоразмера требует выполнения определенного объема работ силами добровольцев. Филиал организации в городе Файтвилл получил пять заявок на предстоящие шесть месяцев. Комитет по надзору дает оценку каждой заявке в численном виде, принимая во внимание различные факторы. Более высокая оценка означает более острую потребность в жилье. В течение предстоящих шести месяцев филиал организации в этом городе может привлечь к работе максимум 23 добровольца. Следующая таблица содержит оценку каждой заявки и необходимое число добровольцев для ее выполнения. Какие заявки следует утвердить комитету?

Заявка	Размер дома(футов^2)	Оценка	Необходимое число добровольцев
1	1200	78	7
2	1000	64	4
3	1100	68	6
4	1000	62	5
5	1200	85	8

7. Шериф округа Вашингтон принимает участие в переизбрании на следующий срок.

Денежные средства на предвыборную кампанию составляют примерно 10000 долларов. Хотя комитет по переизбранию хотел бы провести кампанию во всех пяти избирательных участках округа, ограниченность денежных средств предписывает действовать по-другому, Приведенная ниже таблица содержит данные о числе избирателей и денежных средствах, необходимых для проведения успешной кампании по каждому избирательному участку. Каждый участок может либо использовать все предназначенные деньги, либо вовсе их не использовать. Как следует распределить денежные средства?

Участок	Число избирателей	Необходимые средства ($)
1	3100	3500
2	2600	2500
3	3500	4000
4	2800	3000
5	2400	2000

8. Конструируется электронный прибор, состоящий из трех основных компонентов. Все компоненты соединены последовательно, поэтому выход из строя одного из них влечет за собой отказ всего прибора. Надежность (вероятность безаварийной работы) прибора можно повысить путем дублирования каждого компонента. Конструкция прибора допускает использование одного или двух резервных (параллельных) блоков, т.е. каждый компонент прибора может содержать до трех блоков, соединенных параллельно. Следующая таблица содержит данные о надежности г и стоимости компонентов прибора.

Число параллельных блоков	Компонент 1		Компонент 2		Компонент 3	
	r_1	c_1, ($)	r_2	c_2 ($)	r_3	c_3($)
1	0,6	1000	0,7	3000	0,5	2000
2	0,8	2000	0,8	5000	0,7	4000
3	0,9	3000	0,9	6000	0,9	5000

Общая сумма, выделенная на конструирование прибора, равна 10000 долларов. Как следует сконструировать прибор? (Совет. Наша задача состоит в максимизации надежности $r_1r_2r_3$ прибора. Это значит, что целевая функция является мультипликативной, а не аддитивной.)

9. Решите следующую задачу с помощью метода динамического программирования.

Максимизировать $z=y_1y_2...y_n$

при условиях

$y_1 + y_2 + ... y_n = c$,

$y_i \geq 0$, i = 1,2, ..., n.

(Подсказка. Это упражнение аналогично предыдущему упражнению, но с той лишь разницей, что переменные y_i являются непрерывными.)

10. Решите следующую задачу с использованием метода динамического программирования.

Минимизировать $z=y_1^2+y_2^2+...+y_n^2$

при условиях

$y_1y_2...y_n=c$, $y_i>0$, i=1,2,...,n.

11. Решите следующую задачу посредством метода динамического программирования.

Максимизировать $z=(y_1+2)^2+y_2y_3+(y_4-5)^2$

при условиях

$y_1+y_2+y_3+y_4 \leq 5$,

$y_i \geq 0$ и целые, i=1, 2, 3, 4.

12. Решите следующую задачу с помощью метода динамического программирования.

Минимизировать $z=\max\{f(y_1), f(y_2),..., f(y_n)\}$ при условиях

$y_1+y_2+...+y_n=c$,

$y_i \geq 0$, i=1, 2, ..., n.

Найдите решение задачи при условии, что n=3, c=10, $f(y_1)=y_1+5$, $f(y_2)=5y_2+3$ и $f(y_3)=y_3-2$.

13(1). Строительный подрядчик оценивает минимальные потребности в рабочей силе на каждую из последующих пяти недель следующим образом: b_1, b_2, b_3, b_4 и b_5 рабочих соответственно. Содержание избытка рабочей силы обходится подрядчику в 300 долларов за одного рабочего в неделю, а наем рабочей силы на протяжении одной недели обходится в 400 долларов плюс 200 долларов за одного рабочего в неделю. Решите задачу при следующих минимальных потребностях в рабочей силе.

а) b_1=6, b_2=5, b_3=3, b_4=6, b_5=8.

b) b_1=8, b_2=4, b_3=7, b_4=8, b_5=2.

14(2). Пусть в предыдущей задаче каждому уволенному рабочему выплачивается выходное пособие в размере 100 долларов. Найдите оптимальное решение задачи.

15(3). Туристическое агентство организовывает недельные поездки в Египет. В соответствии с договором на ближайшие четыре недели агентство должно обеспечить туристические группы арендными автомобилями в количестве семь, четыре, семь и восемь штук соответственно. Агентство заключает договор с местным дилером по прокату автомобилей. Дилер назначает арендную плату за один автомобиль 220 долларов в неделю плюс 500 долларов за любую арендную сделку. Агентство, однако, может не возвращать арендованные автомобили в конце недели, и в этом случае оно должно будет только арендную плату в 220 долларов. Каково оптимальное решение проблемы, связанной с арендой автомобилей?

16(4). Компания на следующие четыре года заключила контракт на поставку авиационных двигателей, по 4 двигателя в год. Доступные производственные мощности и стоимость производства меняются от года к году. Компания может изготовить пять двигателей за 1-й год, шесть — за 2-й, три — за 3-й и пять — за 4-й. Стоимость производства одного двигателя на протяжении следующих четырех лет равна соответственно 300 000, 330 000, 350 000 и 420 000 долларов. В течение года компания может произвести больше двигателей, чем необходимо, но в этом случае двигатели должны надлежащим образом храниться до их отгрузки потребителю. Стоимость хранения одного двигателя также меняется от года к году и оценивается в 20 000 долларов для первого года, 30 000 долларов — для второго, 40 000 долларов — для третьего и 50 000 долларов — для четвертого. В начале первого года компания имеет один двигатель, готовый к отгрузке. Разработайте оптимальный план производства двигателей.

17(5). Фирма выпускает пять типов электронных игр (E_1, E_2, ..., E_5) и пять типов механических игрушек (M_1, M_2, ..., M_5). На рынке порядок предпочтения электронных игр таков: $E_1 \to E_2 \to \ldots \to E_5$. Это означает, что клиент будет покупать игру с более высоким предпочтением, если она имеется в продаже. Известен также порядок предпочтения механических игрушек: $M_1 \to M_2 \to \ldots \to M_5$. Недельный спрос на пять типов электронных игр равен 100, 180, 90, 250 и 190 единиц соответственно. Аналогичные показатели для механических игрушек равны 300, 190, 240, 280 и 260 единиц соответственно. Производство одной игры E_1, E_2, ..., E_5 обходится в 10, 12, 8, 9 и 6 долларов соответственно. Изготовление же одной игрушки M_1, M_2, ..., M_5 обходится фирме в 4, 5, 3, 2 и 3 доллара соответственно. Организация производства каждой электронной игры или игрушки обходится в 500 долларов. Определите оптимальный план производства игрушек.

18(1). Компания планирует определить оптимальную политику замены имеющегося в настоящее время трехлетнего механизма на протяжении следующих 4 лет (и = 4), т.е. вплоть до *начала* пятого года. Приведенная таблица содержит относящиеся к задаче данные. Компания требует замены механизма, который находится в эксплуатации 6 лет. Стоимость нового механизма равна 100000 долларов.

Возраст t (года)	Прибыль $r(t)$ ($)	Стоимость обслуживания $c(t)$ ($)	Остаточная стоимость $s(t)$ ($)
0	20000	200	—
1	19000	600	80000
2	18500	1200	60000
3	17200	1500	50000
4	15500	1700	30000
5	14000	1800	10000
6	12200	2200	5000

Постройте сеть и найдите оптимальное решение в задаче в каждом из следующих случаев.

a) В начале первого года имеется механизм, находящийся в эксплуатации 2 года.

b) В начале первого года имеется механизм, находящийся в эксплуатации 1 год.

c) В начале первого года куплен новый механизм.

19(2). Мой тринадцатилетний сын занимается собственным бизнесом— косит газоны десяти клиентам. Каждому клиенту он косит траву три раза в год, получая за один скошенный газон 50 долларов. Он купил косилку за 200 долларов. На протяжении первого года затраты на содержание и использование косилки равны 120 долларов, и через год они увеличиваются на 20%. Одногодичная косилка может быть продана за 150 долларов, и с каждым годом ее стоимость уменьшается на 10%. Мой сын планирует продолжить свой бизнес, пока ему не исполнится 16 лет, и считает, что более выгодно менять косилку через каждые два года. Он объясняет это тем, что цена новой косилки увеличивается за год лишь на 10%. Справедливо ли его решение?

20(3). Группа ферм владеет трактором двухлетней давности и планирует разработать стратегию его замены на следующие пять лет. Трактор должен эксплуатироваться не менее двух и не более пяти лет. В настоящее время новый трактор стоит 40 000 долларов, и эта цена за год увеличивается на 10%. Текущая годичная стоимость эксплуатации трактора составляет 1300 долларов и, как ожидается, будет увеличиваться на 10% в год.

a) Сформулируйте задачу в виде задачи о кратчайшем пути.

b) Постройте соответствующее рекуррентное уравнение.

c) Определите оптимальную стратегию замены трактора на следующие пять лет.

21(4). Рассмотрим задачу замены оборудования на протяжении n лет. Цена новой единицы оборудования равна с долларов, а стоимость продажи после t лет эксплуатации равна $s(t)=2(n-1)$ при $n>t$ и нулю — в противном случае. Годичная прибыль от эксплуатации является функцией возраста оборудования t и равна $r(i)=n^2-1^2$ при $n>t$ и нулю — в противном случае.

a) Сформулируйте задачу как модель динамического программирования.

b) Определите оптимальную стратегию замены оборудования двухгодичной давности при c=10000 долларов, считая, что n=5.

22(5). Решите задачу из предыдущего упражнения, предполагая, что возраст оборудования составляет 1 год и n=4, c=6000 долларов, $r(t)=n/(n+1)$.

23(1). Предположим, вы хотите инвестировать суммы в размере P_1=\$5000, P_2=\$4000, P_3=\$3000 и P_4=\$2000 в начале каждого года. Первый банк выплачивает годовой сложный процент 8,5% и премиальные на протяжении следующих четырех лет в размере 1,8%, 1,7%, 2,1% и 2,5% соответственно. Годовой сложный процент, предлагаемый вторым банком – 8%, но его премиальные на 0,5% выше. Задача состоит в максимизации накопленного капитала к концу четвертого года.

24(2). Некий инвестор с начальным капиталом в 10000 долларов должен решить в конце каждого года, сколько денег истратить и сколько инвестировать. Каждый инвестированный доллар возвращает α=1,09 доллара в конце года. Истраченные y долларов на протяжении каждого года приносят удовлетворение, определяемое количественно как эквивалент получения $g(y)=\sqrt{y}$ долларов. Решите задачу с помощью методов динамического программирования для периода в n=5 лет.

25(3). Фермер имеет k овец. В конце каждого года он принимает решение, сколько овец продать и сколько оставить. Прибыль от продажи одной овцы в i-й год равна p_i. Количество овец в конце i-го года удваивается к концу $(i+1)$-го года. Фермер планирует в конце n-го года полностью продать овец.

a) Получите общее рекуррентное уравнение для решения задачи.

b) Решите задачу при следующих данных: n = 3 года, k = 2 овцы, p_1 = \$100, p_2 = \$130, p_3 = \$120.

Лабораторная работа № 4. Задачи
Тема " ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ "

1. Исследование систем управления запасами.

Рассмотрим однопродуктовую динамическую модель управления запасами. Фирма производит однородную продукцию и поставляет ее потребителю в течении 5 периодов в заданных количествах. У фирмы есть возможность хранить запас продукции, для того, чтобы в нужный момент обеспечивать потребителя. Есть ограничения на мощность производства, хранения и " переналадки " производства. Необходимо при заданных начальных запасах так производить и запасать продукцию в каждом периоде, чтобы суммарные издержки были бы минимальны. Дефицит не допускается.В случае невозможности выполнить заказ мощность производства можно увеличить на 50%, но при этом стоимость производства увеличивается в 2 раза.

Порядок выполнения работы:

- уяснить математическую модель задачи,
- написать уравнение Беллмана,
- ознакомиться с программой ППП ПЭР, реализующей оптимизацию задачи управления запасами (опция " Управление запасами"),
- решить задачу для заданных условий,
- уменьшая величины предельных запасов и мощности производства, обнаружить условия дефицитов.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

Потребность в i-м периоде Ai;
Произведено в i-м периоде Zi;
Емкость склада в i-м периоде Mi;
Мощность производства в i-м периоде Ni;
Затраты на единицу продукции Ci;
Затраты на переналадку Ki;
Цена хранения единицы продукции в i-м периоде Hi;
Начальный запас x0

Номер вариантаm <= 12

Таблица значений

№ пер	Ai	Mi	Ni	Ci	Ki	Hi
1.	m+1	2m+2	m+3	3	2	12-m
2.	2m+2	2m+2	3m+5	4	5	2m
3.	|(m+4)/2|	|(m+6)/3|	|(3m+1)/2|	7	3	m
4.	|(m+6)/3|	|(m+4)/2|	m+5	3m	m	m+2
5.	2m	m	2m+2	m+2	m	m

$x_o=|(m+5)/3|$

*) знак |a| - целая часть числа a.

2.Решение задачи о "ранце".

Содержательная постановка задачи:

Коммерсант разъезжает по пунктам продажи товаров, имея автолавку объемом B единиц и грузоподъемностью G единиц. Автолавка может быть загружена n типами товаров, характеризующимися своими параметрами: Cj - прибыль от реализации единицы товара j-го типа; bj - объем, занимаемый единицей товара j-го типа; gj - вес единицы товара j-го типа. Всего на складе имеется dj единиц товара j-го типа.

Обосновать оптимальное решение по загрузке автолавки товарами из условия максимальной ожидаемой прибыли от реализации.

Примечание. Для вариантов 8-15 считать, что товары имеются в одном экземпляре и известна вероятность спроса на товар j-го типа pj.

№вар	B	G	b1	b2	b3	b4	b5	C1	C2	C3	C4	C5	g1	g2	g3	g4	g5
1	50	50	3	2	1	4	2	4	2	2	6	3	1	3	4	2	5
2	40	60	2	3	1	2	4	5	3	1	4	2	3	2	4	1	7
3	30	70	1	4	2	3	5	3	5	4	9	6	2	3	4	4	4
4	35	40	4	4	2	3	6	5	5	4	2	3	1	3	3	2	4
6	25	50	3	2	5	6	4	3	2	1	4	5	7	2	3	6	2
7	55	45	4	2	5	2	4	3	1	3	5	5	6	5	2	3	2
8	10	12	3	2	1	4	2	4	2	2	6	3	1	3	4	2	5
9	8	15	2	3	1	2	4	5	3	1	4	2	3	2	4	1	7
10	10	10	1	4	2	3	5	3	5	4	9	6	2	3	4	4	4
11	12	9	5	4													

Порядок выполнения работы:

- составить математическую модель задачи;
- решить задачу с использованием ППП ПЭР (опция "Динамическое программирование. Задача "о ранце") при одном ограничении (сначала на вес, затем на объем);
- проанализировать выполнение второго ограничения;
- решить задачу с двумя ограничениями с использованием ППП ПЭР (опция "Линейное целочисленное программирование");
- интерпретировать полученные результаты;
- изменить объем b или вес g в пределах 30%, получить новое решение и проанализировать полученные результаты.

Контрольные вопросы.

1. Пояснить смысл уравнения Беллмана.
2. Что называют условным оптимальным выигрышем?
3. Какие особенности задачи позволяет решать ее методом ДП?
4. Что значит действовать оптимально в i-м периоде?
5. Что означает свойство аддитивности критерия?
6. Что является в данной задаче "состоянием", "управлением", "выигрышем"?

7. За счет чего в процедуре ДП сокращается перебор вариантов?
8. В чем заключается динамичность модели?
9. Почему нельзя оптимизировать управление в отдельном периоде?
10. Каковы условия возникновения дефицита?